Aufagebenkatalog zum Kurs zu Stoch0 – Winter 2024/2025
Aufgaben zum Thema **Diskrete Zufallsvariablen**
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 1 Wir betrachten drei faire sechsseitige Würfel. Auf den Seiten der drei Würfel sind folgende Augenzahlen aufgedruckt:

$$\text{Würfel } A\colon 6,6,2,2,2,2$$
$$\text{Würfel } B\colon 5,5,5,5,1,1$$
$$\text{Würfel } C\colon 4,4,4,3,3,3$$

a) Würfel B wird zweimal hintereinander geworfen.

   (i) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum zur Beschreibung dieses Zufallsexperimentes an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse.

   (ii) Bezeichne S die Zufallsvariable "Summe der beiden Augenzahlen". Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S = 6)$ und $P(S \leq 10)$.

b) Zwei Personen spielen gegeneinander. Jeder Spieler wählt einen der drei Würfel A, B oder C aus und wirft einmal. Der Spieler mit der höchsten geworfenen Augenzahl gewinnt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass

   (i) Spieler 1 gewinnt, wenn Spieler 1 Würfel A und Spieler 2 Würfel B gewählt hat,

   (ii) Spieler 1 gewinnt, wenn Spieler 1 Würfel B und Spieler 2 Würfel C gewählt hat,

   (iii) Spieler 2 gewinnt, wenn Spieler 1 Würfel A und Spieler 2 Würfel C gewählt hat.

c) Ist es aufgrund ihrer Ergebnisse aus Aufgabenteil b) möglich eine Aussage zu treffen, welcher der drei Würfel "der Beste" ist.

Aufgabe 2 Wir würfeln mit zwei fairen Würfeln. Sei X die Augenzahl des ersten und Y die Augenzahl des zweiten Würfels. Sei $W := \min\{X, Y\}$ und $Z := 2^Y$. Geben Sie die Wertebereiche $X(\Omega)$, $W(\Omega)$, und $Z(\Omega)$ an und berechnen Sie die Verteilungen von X, W und Z.

Aufgabe 3 Sie und Ihr Freund werfen je einen fairen Würfel. Derjenige, der die kleinere Zahl wirft, zahlt an den anderen so viele Geldeinheiten, wie die Differenz der Augenzahlen beträgt. Die Zufallsvariable X beschreibt Ihren Gewinn, wobei ein negativer Gewinn für Ihren Verlust steht.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X, und berechnen Sie den Erwartungswert.

b) Falls Sie beide die gleiche Zahl würfeln, wird der Vorgang noch einmal wiederholt, aber die Auszahlungen verdoppeln sich. Würfeln Sie wieder die gleiche Zahl, ist das Spiel beendet. Geben Sie für das modifizierte Spiel die Wahrscheinlichkeitsfunktion Y für Ihren Gewinn bzw. Verlust an.

Aufgabe 4 In einer Urne befinden sich $N = 4$ Kugeln, welche die Zahlen 2, 4, 8 und 16 tragen. Es werden nach dem Modell mit Zurücklegen $n = 2$ Kugeln entnommen. Man definiert die Zufallsvariable X als den Durchschnitt der beiden Zahlen, die die beiden entnommenen Kugeln tragen.

a) Zählen Sie die 16 möglichen Ergebnisse des Zufallsvorgangs in Form von Zahlenpaaren auf, und bestimmen Sie die möglichen Ausprägungen (Werte) von X.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion von X.

c) Bestimmen Sie den Median, das 25%- und das 75%- Quantil.

Aufgabe 5 Aus einer Urne mit 4 Kugeln, die die Zahlen -3, -1, 1 und 3 tragen, wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Man bestimme die Verteilung der Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln ($= X$).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe echt positiv ist?

b) Wie lautet die Verteilung von $Z = X^2$?

c) Sei Y die Zufallsgröße "Summe der quadrierten Zahlen auf den gezogenen Kugeln". Wie lautet die Verteilung von Y?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Y echt größer X^2 ist?

Aufgabe 6 Die diskrete Zufallsvariable X kann nur die ganzzahligen Werte zwischen -3 und $+4$ annehmen. Ihre Verteilungsfunktion $F(x)$ lautet an diesen Werten:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$F(x)$	0.05	0.15	0.30	0.40	0.65	0.85	0.95	1

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten
$P(-1 < X \leq 3)$, $P(-1 < X < 3)$, $P(-1 \leq X < 3)$ und $P(-1 \leq X \leq 3)$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = X^2$.

Aufgabe 7 Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Sei ferner der geordnete Wertebereich von X gleich $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Unter Umständen kann $f(x_i) < 0$ sein.

b) $F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$.

c) $P(X > x) = 1 - F(x)$.

d) $\sum_{x_i} F(x_i) = 1$.

e) Ist $x_i < x_j$ so ist $F(x_i) \leq F(x_j)$.

f) $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ für $i = 2, \ldots, n$.

g) $f(x_i) < F(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

h) $f(x_1) = F(x_1)$.

Aufgabe 8 Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $\mathrm{Var}(X)$. Sei ferner der geordnete Wertebereich von X gleich $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$.

b) $E(X) \geq x_1$.

c) $\mathrm{Var}(X) \geq x_1$.

d) $\mathrm{Var}(X) \geq E(X)$.

e) $\mathrm{Var}(X) \leq E(X^2)$.

f) $\mathrm{Var}(X) \leq E(X)^2$.

Aufgabe 9 Zwei faire Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Bezeichne X_1 die Augenzahl des ersten und X_2 die des zweiten Würfels. Geben Sie für die daraus abgeleiteten Zufallsvariablen Y und Z zuerst jeweils den Träger T_Y und T_Z an. Sind Y und Z stochastisch unabhängig oder abhängig?

a) $Y = X_1$, $Z = 2X_2$.

b) $Y = X_1$, $Z = X_1 + X_2$.

c) $Y = X_1 + X_2$, $Z = X_1 - X_2$.

Aufgabe 10 Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y, die die Augensumme bzw. die Differenz beim Werfen zweier fairer Würfel angeben, unabhängig?

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass die Varianz einer geometrisch zum Parameter p verteilten Zufallsvariablen gleich $\frac{1-p}{p^2}$ ist.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ gleich λ ist.

Aufgabe 13 Aus Erfahrung weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Digitalcomputer eines bestimmten Typus während 12 Stunden kein Fehler auftritt, 0.7788 beträgt.

a) Welche Verteilung eignet sich zur näherungsweisen Beschreibung der Zufallsvariable $X =$Anzahl der Fehler, die während 12 Stunden auftreten?

b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während 12 Stunden mindestens zwei Fehler auftreten.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei vier (voneinander unabhängigen) Digitalcomputern desselben Typus während 12 Stunden genau ein Fehler auftritt?

Aufgabe 14 Eine diskrete Zufallsvariable X nimmt nur die Werte 0, 1 oder 2 an. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = P(X = x)$ von X hängt von einem Parameter $\theta \in [0, 1]$ ab:

$$P(X = 0) = 0.36, \quad P(X = 1) = 0.64 \cdot \theta, \quad P(X = 2) = 0.64 \cdot (1 - \theta).$$

Für welchen Wert von θ ist X binomialverteilt?

Aufgabe 15 Eine Rückversicherung will die Prämien für Versicherungen gegen Großunfälle kalkulieren. Aus Erfahrung weiß sie, daß im Mittel 3,7 bzw. 5,9 Großunfälle im Winter- bzw. Sommerhalbjahr vorfallen.

a) Welche Verteilungsannahme erscheint für die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} X &= \text{Anzahl der Großunfälle im Winterhalbjahr}, \\ Y &= \text{Anzahl der Großunfälle im Sommerhalbjahr} \end{aligned}$$

sinnvoll?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass im Winterhalbjahr nicht mehr als zwei Großunfälle vorfallen? Wie wahrscheinlich ist es im Sommerhalbjahr?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass sowohl im Winter- als auch im Sommerhalbjahr nicht mehr als zwei Großunfälle vorfallen? Welche Annahme unterstellen Sie dabei?

Diese Aufgaben sind aus alten Klausuren.

Aufgabe 16 Drei faire Würfel werden gleichzeitig geworfen.

a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) für das Zufallsexperiment an.

Sie nehmen an folgendem Gewinnspiel teil: Zeigen alle Würfel die gleiche Zahl, so gewinnen Sie 6 Euro. Fällt eine 1, eine 2 und eine 3, so gewinnen Sie 12 Euro. Es bezeichne $X : \Omega$ß$\mathbb{R}$ Ihren Gewinn.

b) Definieren Sie X formal als Abbildung und geben Sie die Verteilung von X an.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ von X.

Aufgabe 17 Sei Z gleichverteilt auf $\{1, 2, 3, 4\}$. Weiter definieren wir zwei Zufallsvariablen X und Y durch

$$X = \begin{cases} 1, & \text{falls } Z \text{ gerade ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad , \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{falls } Z = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und Y.

b) Prüfen Sie, ob X und Y unabhängig sind.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X + Y]$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X + Y)$.

Aufgabe 18

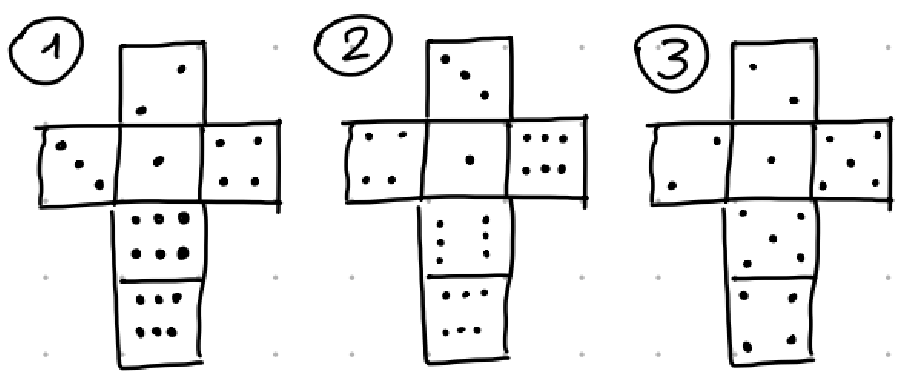
a) Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P), wobei $\Omega \neq \varnothing$ eine endliche Menge sei. Seien weiter $A, B \in F$ zwei Ereignisse.

   (i) Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

   (ii) Es gelte $P(A|B) = P(B|A)$, $P(A \cup B) = 1$ und $P(A \cap B) > 0$. Beweisen Sie, dass $P(A) > \frac{1}{2}$ ist.

b) Eine Glühbirnenfabrik hat drei Maschinen verschiedenen Alters. Maschine 1 produziert 20% aller Glühbirnen, Maschine 2 produziert 30% und Maschine 3 produziert 50%. Es sind 5% aller von Maschine 1 hergestellten Glühbirnen defekt, bei Maschine 2 sind es 4% und bei Maschine 3 nur 2%. Eine zufällig entnommene Glühbirne ist defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Maschine 3 stammt?

Aufgabe 19 Es seien drei faire Würfel mit folgenden Seitenverteilungen gegeben



a) Es wird zufällig ein Würfel ausgewählt. Die Nummer dieses Würfels sei W. Dann wird der Würfel einmal geworfen. Das Ergebnis sei X.

i) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment. Definieren Sie auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum die Zufallsvariablen W und X.

ii) Beschreiben Sie das Ereignis, dass die Augenzahl sechs ist, mit Hilfe der Zufallsvariablen aus i). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

iii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der gewählte Würfel die Nr. 1 hat, gegeben dass das Ergebnis sechs ist.

b) Der zufällig gewählte Würfel aus a) wird 3 Mal geworfen (aber nicht neu ausgewählt) mit Ergebnissen X_1, X_2, X_3.

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[X_1 = X_2 = 6]$.

ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E[X_1 + X_2 + X_3]$.

Aufgabe 20 Es seien $p \in (0,1)$, $\lambda > 0$, $Z, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ und $Z \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Definiere die Zufallsvariablen

$$M = \#\{i \in \mathbb{N} : i \leq Z, X_i = 1\}, \quad N := \#\{i \in \mathbb{N} : i \leq Z, X_i = 0\},$$

wobei # die Kardinalität einer Menge beschreibt.

a) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion von Z.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z mit Hilfe der Erzeugendenfunktion.

c) Seien $z, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq z$. Drücken Sie das Ereignis

$$A_{m,z} = \{M = m\} \cap \{\Sigma = z\}$$

mit Hilfe der Zufallsvariablen $Z, X_1, \ldots, X_z$ aus und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A_{m,z}$.

d) Bestimmen Sie $P[M = m, N = n \mid Z = z]$ für $z, m, n \in \mathbb{N}_0$.

e) Bestimmen Sie $P[M = m, N = n]$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$.

f) Bestimmen Sie die Verteilungen von M und N.

g) Zeigen Sie, dass M und N unabhängig sind.

Aufgabe 21 a) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit

$$P(A_1) = \frac{1}{5}, \quad P(A_2) = \frac{1}{3}, \quad P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2}.$$

Berechnen Sie $P(A_2|A_1)$.

b) An drei aufeinanderfolgenden Wochen machen Sie jeweils donnerstags einen Ausflug zu einer nahe gelegenen Eisdiele, um sich eine Kugel Eis zu kaufen. Dabei wählen Sie stets rein zufällig zwischen den Sorten Erdbeere, Mango, Schokolade und Vanille. Als Wahrscheinlichkeitsraum wählen wir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei

$$\Omega = \{\text{Erdbeere, Mango, Schokolade, Vanille}\}^3,$$

$\mathcal{F}$ sei die Potenzmenge 2^Ω von Ω und $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ sei gegeben durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Beschreiben Sie das Ereignis

$$E := \{\text{“Jede Woche entscheiden Sie sich für eine unterschiedliche Eis-Sorte.”}\}$$

formal als Teilmenge von Ω und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$.

Aufgabe 22 Sie werfen eine faire Münze unendlich oft, wobei die einzelnen Würfe voneinander unabhängig seien. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \{\text{“Im } n\text{-ten Wurf zeigt die Münze „Kopf“.”}\}.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unendlich oft „Kopf“ geworfen wird.

Aufgabe 23 Seien $p \in (0, \frac{1}{2})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$P(X_1 = 1) = p, \quad P(X_1 = -1) = 1 - p.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und

$$B_n := \{S_n = 5\}.$$

Zeigen Sie, dass $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) < 1$.